MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ "MIRCEA CEL BĂTRÂN"
SESIUNEA IULIE 2015

APROB,
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Beazit ALI
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cdor
Conf.univ.dr.ing.
Florin NICOLAE

PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. a) Să se determine mulţimea

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x-1}{3}+\frac{2}{5}\geq\frac{2x+3}{5}-\frac{1}{3}\right\}.$$

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$|3x+1|=2.$$

c) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-m^2)x+m+5$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât funcţia f să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. a) Să se arate că $A_n^k=nA_{n-1}^{k-1},\ \forall k,n\in\mathbb{N}^*, n\geq k$ şi că $\sum_{k=1}^{n}\frac{A_n^k}{A_{n-1}^{k-1}}=n^2$.

b) Să se rezolve inecuaţia $C_{5x}^{x^2+4}\leq 1$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}\dfrac{A_{4x}^{y-2}}{A_{4x}^{y-3}}=6\\[2ex]\dfrac{C_{4x}^{y-2}}{C_{4x}^{y-3}}=2\end{cases}.$$

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0,2]$.

c) Să se demonstreze că $2e^{\sqrt{3}} \le 3e^{\sqrt{2}}$.

4. Fie corpul $(\mathbb{R},*,\circ)$ cu $x*y=x+y-2$ şi $x\circ y=2xy-4(x+y)+10$.

a) Să se determine elementul neutru faţă de legea $*$.

b) Să se determine elementul neutru faţă de legea $\circ$.

c) Să se determine elementele inverse x' şi x'' în raport cu $*$ şi, respectiv, $\circ$.

5. a) Să se calculeze

$$\int \frac{x^3+4\sqrt{x}+3}{x^2}dx,\ x>0.$$

b) Fie funcţiile $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x}$ şi $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

c) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+e^x,\ x\le 0\\ 1+\sqrt{x},\ x>0\end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru este 3 ore.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Lt.Cdor
Ş.l.univ.dr.ing. Cătălin CLINCI
SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cpt. Cdor
Instr.av.dr.ing. Dinu-Vasile ATODIRESEI

MINISTERUL APĂRĂRII NAŢIONALE
ACADEMIA NAVALĂ "MIRCEA CEL BĂTRÂN"
SESIUNEA IULIE 2015

APROB,
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Cdor
Prof.univ.dr.ing.
Beazit ALI
PREŞEDINTELE COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cdor
Conf.univ.dr.ing.
Florin NICOLAE

BAREM
PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ

1. Oficiu 1p

a) A determina elementele mulţimii A se reduce la rezolvarea inecuaţiei

$\frac{x-1}{3}+\frac{2}{5}\geq\frac{2x+3}{5}-\frac{1}{3}$ 1p

$5x-5+6\geq 6x+9-5$ 1p

$5x-6x\geq 4-1 \Leftrightarrow -x\geq 3\Leftrightarrow x\leq -3$. Deci, $A=\left(-\infty,-3\right]$ 1p

b) Să ştie că $\left|3x+1\right|=\begin{cases}3x+1, & x>-\frac{1}{3}\\ 0, & x=-\frac{1}{3}\\ -3x-1, & x<-\frac{1}{3}\end{cases}$ 1p

$3x+1=\pm 2$ ....
1p

$x\in\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$ 1p

c) f monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $1-m^2>0$ 1p

$m\in\left(-1,1\right)$ 1p

Pentru $m=\pm 1$, funcţia este constantă 1p

2. Oficiu 1p

a) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ 1p

$\frac{A_n^k}{A_{n-1}^{k-1}} = n$ 1p

$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_n^k}{A_{n-1}^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} n = n^2$ 1p

b) Condiţii de existenţă: $5x \in \mathbb{N}$, $x^2+4 \in \mathbb{N}$ şi $5x \geq x^2+4$ 0,5p

$x^2 - 5x + 4 \leq 0, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1,2,3,4\}$ 1p

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ 0,5p

$x = 1 \Rightarrow C_5^5 \leq 1$; $x = 2 \Rightarrow C_{10}^8 > 1$; $x = 3 \Rightarrow C_{15}^{13} > 1$; $x = 4 \Rightarrow C_{20}^{20} \leq 1$. Deci, $x \in \{1,4\}$ 1p

c) Condiţii de existenţă: $4x \in \mathbb{N}$, $y-2 \in \mathbb{N}, y-3 \in \mathbb{N}, 4x \geq y-2, 4x \geq y-3$ 0,5p

$$\begin{cases} \frac{(4x)!}{(4x-y+2)!} : \frac{(4x)!}{(4x-y+3)!} = 6 \\ \frac{(4x)!}{(y-2)!(4x-y+2)!} : \frac{(4x)!}{(y-3)!(4x-y+3)!} = 2 \end{cases}$$ 1p

$$\begin{cases} 4x-y+3 = 6 \\ \frac{4x-y+3}{y-2} = 2 \end{cases}$$ 1p

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$ 0,5p

3. Oficiu 1p

a) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'x^2-e^x\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$ 1p

$f'(x)=\frac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}$ 1p

$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$ 1p

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$ 1p

$e^x>0, \forall x\in(0,2]$, $x-2\le 0, \forall x\in(0,2]$, $x^3>0, \forall x\in(0,2]$ ....

1p

$f'(x)\le 0,\ \forall x\in(0,2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $(0,2]$.................................... 1p

c) $2e^{\sqrt{3}}\le 3e^{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{3}\le\frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\le\frac{e^{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{3}\right)\le f\left(\sqrt{2}\right)$ 1p

Cum $0<\sqrt{2}<\sqrt{3}<2$ şi f descrescătoare pe $(0,2]$, rezultă $f\left(\sqrt{2}\right)\ge f\left(\sqrt{3}\right)$................ 2p

4. Oficiu 1p

a) $x*e=x$ 1p

$x+e-2=x$ 1p

$e=2$ 1p

b) $x\circ u=x$ 1p

$2u(x-2)=5x-10$ 1p

$u=\frac{5}{2}$ ....

1p

c) $x*x'=2$ 0,5p

$x+x'-2=2$ 0,5p

$x'=4-x$ 0,5p

$x*x''=\frac{5}{2}$ 0,5p

$2x''(x-2)=4x-\frac{15}{2}$ 0,5p

$x''=\frac{8x-15}{4(x-2)},\ x\ne 2$ 0,5p

5. Oficiu 1p

a) $\int \frac{x^3+4\sqrt{x}+3}{x^2}dx = \int\left(x+\frac{4}{\sqrt{x^3}}+\frac{3}{x^2}\right)dx = \int xdx + 4\int\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx + 3\int\frac{1}{x^2}dx$ 1p

$\int xdx = \frac{x^2}{2}+C_1$ 0.5p

$\int\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{-2}{\sqrt{x}}+C_2$ 0.5p

$\int\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{x}+C_3$ 0.5p

$\int \frac{x^3+4\sqrt{x}+3}{x^2}dx = \frac{x^2}{2}-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}+C$ 0.5p

b) Funcţia F este o primitivă a funcţiei f dacă F este derivabilă pe $[1,+\infty)$ şi $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in[1,+\infty)$ 1p

F este derivabilă pe $[1,+\infty)$ ca un cât de funcţii derivabile 0.5p

$F'(x)=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 1p

$F'(x)=f(x)$ 0.5p

c) f continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,+\infty)$ ca sumă de funcţii continue (1) 0.5p

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+e^x\right)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\sqrt{x}\right)=1$ 0.5p

Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$, atunci $\exists\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$..0.5p

Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, $f(0)=1$, atunci f este continuă în $x=0$ (2) 0.5p

Conform (1) şi (2), rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$ 0.5p

f este continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ 0.5p

NOTĂ. Orice altă rezolvare corectă va primi punctajul maxim.

SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE F.I.M.
Lt.Cdor
Ş.l.univ.dr.ing. Cătălin CLINCI
SECRETARUL COMISIEI DE ADMITERE F.N.M.N.
Cpt. Cdor
Instr.av.dr.ing. Dinu-Vasile ATODIRESEI